第 2 节 双曲线的焦点三角形相关问题（★★★）

强化训练

1.（★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 右支上一点，且 $|PF_2|=|F_1F_2|$，则 ΔPF_1F_2 的面积等于（   ）

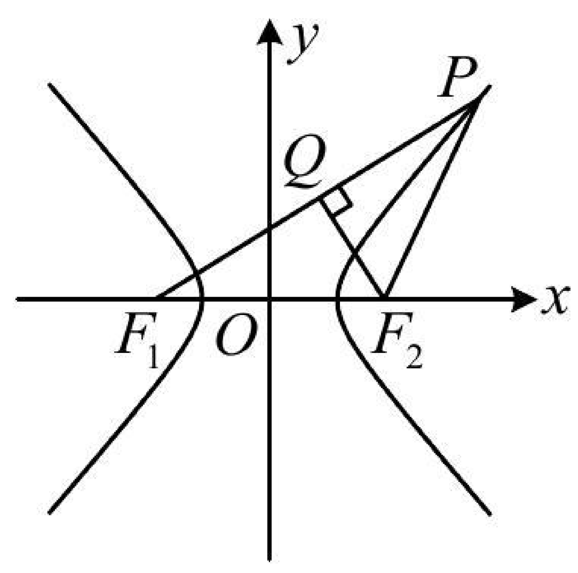
（A）24　（B）36　（C）48　（D）96

答案：C

解析： 如图，等腰 ΔPF_1F_2 已知腰长 $|F_1F_2|$ 和 $|PF_2|$，求面积再求个底边 $|PF_1|$ 和高，其中 $|PF_1|$ 可用定义算，

由题意，$|PF_2|=|F_1F_2|=10$，$|PF_1|-|PF_2|=6\Rightarrow|PF_1|=16$，取 PF_1 中点 Q，连接 F_2Q，则 $F_2Q\perp PF_1$，

$|QF_2|=\sqrt{|PF_2|^2-|PQ|^2}=6$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_2Q|=\dfrac{1}{2}\times16\times6=48$.



2.（2020•新课标III卷•★★）设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\sqrt{5}$，P 是 C 上一点，$F_1P\perp F_2P$，若 ΔPF_1F_2 的面积为 4，则 $a=$（   ）

（A）1　（B）2　（C）4　（D）8

答案：A

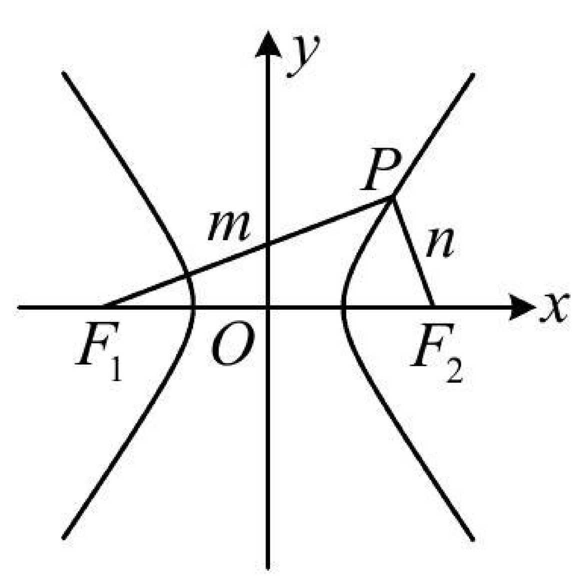
解析： 先由离心率把变量统一起来，$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}a$，所以 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{5}a$，

焦点三角形中涉及垂直关系，常用勾股定理翻译，并结合定义处理，

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，如图，$F_1P\perp F_2P\Rightarrow m^2+n^2=|F_1F_2|^2=20a^2$ ①，由双曲线定义，$|m-n|=2a$ ②，

把①配方可得 $m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=20a^2$，结合式②可得 $4a^2+2mn=20a^2$，所以 $mn=8a^2$，

故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}mn=4a^2$，由题意，$S_{\Delta PF_1F_2}=4$，所以 $4a^2=4$，故 $a=1$.



3.（2022 •江西九江三模 •★★）双曲线 $\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{1-t}=1(0<t<1)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为圆 $x^2+y^2=1$ 与该双曲线的一个公共点，则 ΔPF_1F_2 的面积为（　　）

（A）$1-t$　　（B）t　　（C）$2t-1$　　（D）1

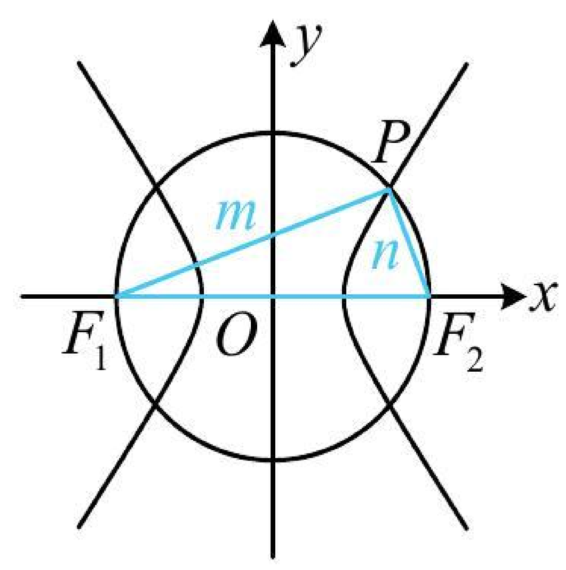
答案：A

解析：由题意，双曲线的半焦距 $c=\sqrt{t+1-t}=1$，

所给圆即为以 F_1F_2 为直径的圆，点 P 在圆上隐含了 $PF_1\perp PF_2$，可用勾股定理结合双曲线定义来处理，

如图，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2=4$ ①，由双曲线定义，$|m-n|=2\sqrt{t}$ ②，

由①可得 $m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=4$，将②代入得 $4t+2mn=4$，所以 $mn=2-2t$，故 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}mn=1-t$.



4.（2022 • 广西南宁模拟 • ★★★）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，直线 $y=kx(k\neq 0)$ 与双曲线 C 交于 A，B 两点，若 $\angle AFB=90^{\circ}$，且 ΔOAF 的面积为 $4a^2$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{6}}{5}$　　（B）$\frac{\sqrt{26}}{5}$　　（C）2　　（D）3

答案：D

解析：看到过原点的直线与双曲线交于 A，B 两点，想到和两焦点构成平行四边形，

如图，设双曲线 C 的左焦点为 F_1，则四边形 AF_1BF 为平行四边形，

又 $\angle AFB=90^{\circ}$，所以四边形 AF_1BF 为矩形，故 $\angle F_1AF=90^{\circ}$，

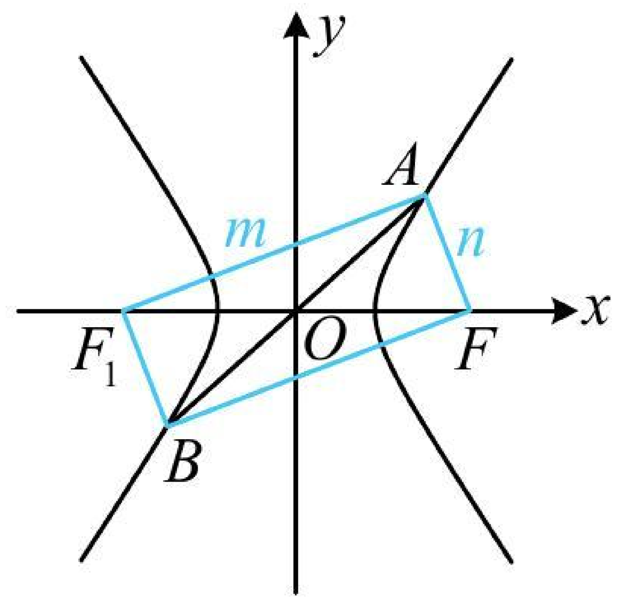
ΔOAF 的面积可换算成 ΔAFF_1 的面积，于是结合双曲线的定义和勾股定理处理即可，

设 $|AF_1|=m$，$|AF|=n$，则 $m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2$ ①，由双曲线定义，$|m-n|=2a$ ②，

由①可得 $m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=4c^2$，将式②代入可得 $4a^2+2mn=4c^2$，所以 $mn=2c^2-2a^2$，

故 $S_{\Delta AFF_1}=\frac{1}{2}mn=c^2-a^2$，由题意，$S_{\Delta OAF}=4a^2$，所以 $S_{\Delta AFF_1}=2S_{\Delta OAF}=8a^2$，从而 $c^2-a^2=8a^2$，故 $c^2=9a^2$，

所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=3$.



5．（2012•大纲卷•★★）已知 F_1，F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=2$ 的左、右焦点，点 P 在 C 上，$|PF_1|=2|PF_2|$，则 $\cos\angle F_1PF_2=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{3}{5}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

答案： C

解析： 条件涉及 $|PF_1|=2|PF_2|$，想到结合定义求出 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$，到 ΔPF_1F_2 中用余弦定理推论求 $\cos\angle F_1PF_2$，

$x^2-y^2=2\Rightarrow\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1\Rightarrow$ 双曲线的实半轴长 $a=\sqrt{2}$，焦距 $|F_1F_2|=4$，

由题意，$\begin{cases}|PF_1|=2|PF_2|\\|PF_1|-|PF_2|=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|PF_1|=4\sqrt{2}\\|PF_2|=2\sqrt{2}\end{cases}$，在 ΔPF_1F_2 中，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\dfrac{3}{4}$.

6．（2023 • 河南郑州一模 • ★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 右支上的一点，且 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{4}$，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2a^2$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

（A）2　　（B）4　　（C）6　　（D）9

答案： A

解析： 有 $\cos\angle F_1PF_2$，故直接用定义算 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$，

由题意，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\dfrac{1}{4}=2a^2$，所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=8a^2$ ①，

看到式①，又想到结合由定义求解 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$，

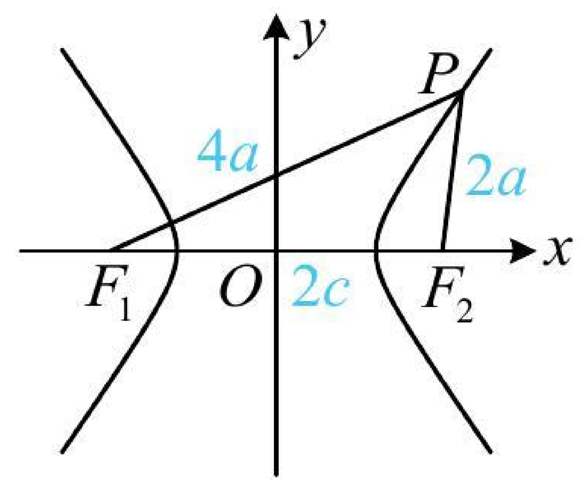
又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_1|=2a+|PF_2|$，

代入①解得：$|PF_2|=2a$ 或 $-4a$（舍去），故 $|PF_1|=4a$，

如图，我们发现 ΔPF_1F_2 三边都表示出来了，可由余弦定理建立方程求离心率，

由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以 $4c^2=16a^2+4a^2-2\times4a\times2a\times\dfrac{1}{4}$，整理得 $e=\dfrac{c}{a}=2$.



7．（2022 • 河南模拟 • ★★★）已知 F_1， F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A，B 两点，若 ΔABF_2 是等边三角形，则 C 的离心率是_____.

答案：$\sqrt{7}$

解析：涉及双曲线上的点和左、右焦点，优先考虑定义，如图，由双曲线定义，$|BF_1|-|BF_2|=2a$ ①，

又 ΔABF_2 是正三角形，所以 $|BF_2|=|AB|$，代入①得：$|BF_1|-|BF_2|=|BF_1|-|AB|=|AF_1|=2a$，

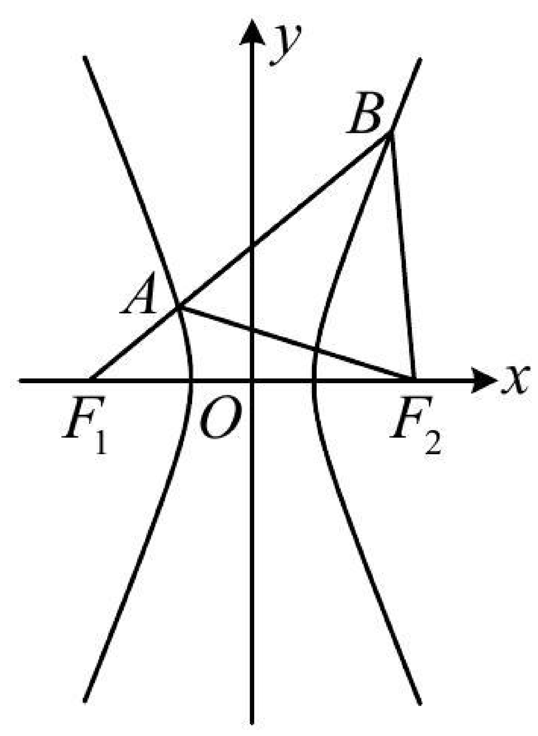
因为点 A 也在双曲线上，所以 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，故 $|AF_2|=|AF_1|+2a=4a$，

正三角形除了已知边长关系外，还知道角，可在 ΔAF_1F_2 中由余弦定理建立方程求离心率，

由题意，$\angle BAF_2=60^{\circ}$，$\angle F_1AF_2=180^{\circ}-\angle BAF_2=120^{\circ}$，

在 ΔAF_1F_2 中，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cdot\cos\angle F_1AF_2$，

所以 $4c^2=4a^2+16a^2-2\times2a\times4a\times\cos120^{\circ}$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=7$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{7}$.



8．（2022 • 河南月考改 • ★★★★）已知 F_1， F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，O 为原点，双曲线上的点 P 满足 $|OP|=b$，且 $|PF_2|=3|PF_1|$，则该双曲线的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{3}$

答案：D

解析：由 $|PF_2|=3|PF_1|$ 想到可结合定义求出 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$，

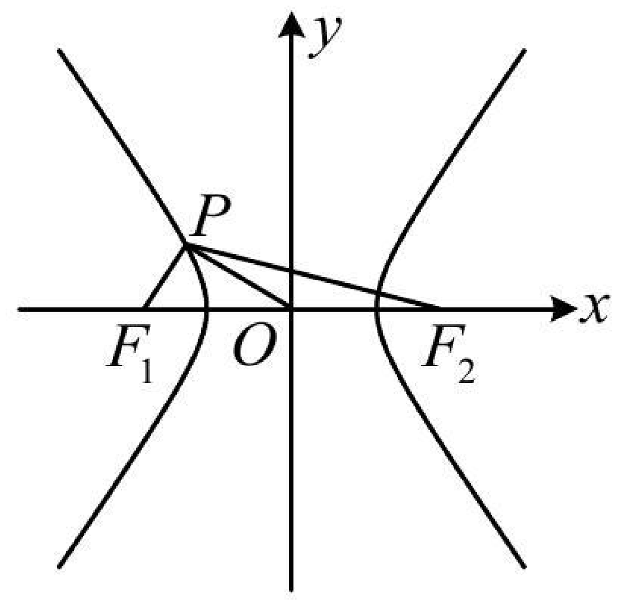
由双曲线定义，$|PF_2|-|PF_1|=2a$，结合 $|PF_2|=3|PF_1|$ 可得 $|PF_1|=a$，$|PF_2|=3a$，

到此图中所有线段都已知了，可用“双余弦法”来建立方程求离心率，

在 ΔPF_1O 中，$|OP|^2+|PF_1|^2=b^2+a^2=c^2=|OF_1|^2$，所以 $PO\perp PF_1$，故 $\cos\angle PF_1O=\dfrac{|PF_1|}{|OF_1|}=\dfrac{a}{c}$ ①，

在 ΔPF_1F_2 中，$\cos\angle PF_1O=\dfrac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\dfrac{a^2+4c^2-9a^2}{2a\cdot 2c}=\dfrac{c^2-2a^2}{ac}$ ②，

由①②可得 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{c^2-2a^2}{ac}$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=3$，所以双曲线 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.



9.（2022·湖南长沙模拟·★★★）已知 F_1，F_2 分别是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线与双曲线的右支相交于 P，Q 两点，若 $PQ\perp PF_1$，且 $|PQ|=|PF_1|$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5-2\sqrt{2}}$　　（C）$\sqrt{5+2\sqrt{2}}$　　（D）$1+2\sqrt{2}$

答案：B

解析：如图，涉及双曲线上的点和左、右焦点，可尝试结合已知条件和双曲线定义研究有关线段的长，

设 $|PQ|=|PF_1|=m$，因为 $PQ\perp PF_1$，所以 $|QF_1|=\sqrt{2}m$，由双曲线定义，$\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=2a\\|QF_1|-|QF_2|=2a\end{cases}$，

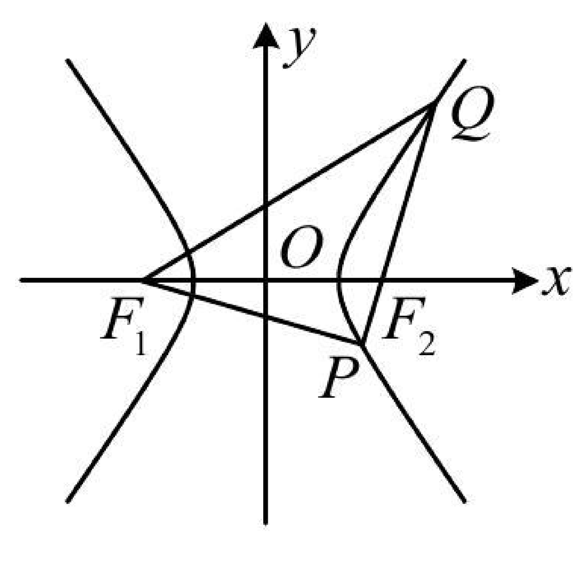
两式相加得：$|PF_1|+|QF_1|-(|PF_2|+|QF_2|)=|PF_1|+|QF_1|-|PQ|=m+\sqrt{2}m-m=4a$，所以 $m=2\sqrt{2}a$，

故 $|PF_1|=2\sqrt{2}a$，$|PF_2|=|PF_1|-2a=2(\sqrt{2}-1)a$，

接下来只需在 ΔPF_1F_2 中用勾股定理，即可建立 a 和 c 的方程求离心率，

因为 $PQ\perp PF_1$，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，故 $8a^2+4(\sqrt{2}-1)^2a^2=4c^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=5-2\sqrt{2}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.



10.（★★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A，B 分别在其左、右两支上，$\overrightarrow{F_1B}=3\overrightarrow{F_1A}$，$T$ 为线段 AB 的中点，且 $F_1T\perp F_2T$，则双曲线的离心率为_____.

答案：$\sqrt{7}$

解析：如图，先由已知条件结合双曲线定义分析有关线段的长，

因为 T 为线段 AB 的中点，且 $F_1T\perp F_2T$，所以 $|AF_2|=|BF_2|$，设 $|AF_2|=|BF_2|=m$，

由双曲线定义，$|AF_2|-|AF_1|=2a$，所以$|AF_1|=|AF_2|-2a=m-2a$，

又$\overrightarrow{F_1B}=3\overrightarrow{F_1A}$，所以$|BF_1|=3|AF_1|=3m-6a$，因为点 B 在双曲线右支上，所以$|BF_1|-|BF_2|=2a$，

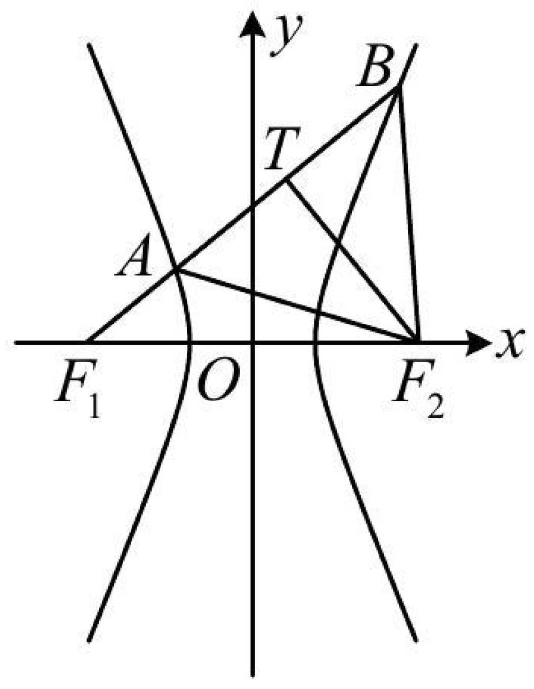
即$3m-6a-m=2a$，故$m=4a$，所以$|BF_1|=6a$，$|BF_2|=4a$，$|AF_1|=2a$，$|AF_2|=4a$，

注意到$|AB|=|BF_1|-|AF_1|=4a$，所以$|AB|=|AF_2|=|BF_2|$，从而ΔABF_2是正三角形，故$\angle F_1BF_2=60^{\circ}$，

此时ΔBF_1F_2三边都已知，还知道一个角，可用余弦定理建立方程求离心率，

由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|\cdot\cos\angle F_1BF_2$，即$4c^2=36a^2+16a^2-2\times6a\times4a\times\cos60^{\circ}$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=7$，所以双曲线 C 的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{7}$.



11．（2022•云南玉溪模拟•★★★★）已知双曲线 E 的焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过F_1的直线 l 与 E 的左支交于 P，Q 两点，点 P 在以F_1F_2为直径的圆上，$|PQ|:|PF_2|=3:4$，则 E 的方程为（　　）

（A）$2x^2-2y^2=1$　（B）$\dfrac{17x^2}{9}-\dfrac{17y^2}{8}=1$　（C）$3x^2-\dfrac{3y^2}{2}=1$　（D）$4x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$

答案：B

解析：设双曲线 E 的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则由题意，$a^2+b^2=1$ ①，

条件有比例式，想到设 k，因为$|PQ|:|PF_2|=3:4$，所以可设$|PQ|=3k$，$|PF_2|=4k(k>0)$，

如图，点 P 在以F_1F_2为直径的圆上，所以$PF_1\perp PF_2$，故$|QF_2|=\sqrt{|PQ|^2+|PF_2|^2}=5k$，

注意到 P，Q 两点在双曲线上，又涉及双曲线的焦点，故想到双曲线的定义，先写出来再看，

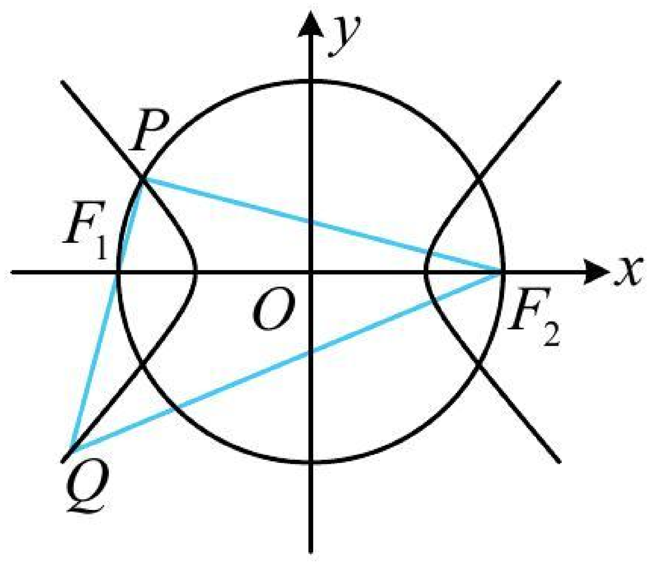
由图可知，$\begin{cases}|PF_2|-|PF_1|=4k-|PF_1|=2a & ②\\ |QF_2|-|QF_1|=5k-|QF_1|=2a & ③\end{cases}$，

观察发现两式相加，可把$|PF_1|+|QF_1|$化为$|PQ|$，找到 k 与 a 的关系，

②＋③可得$9k-(|PF_1|+|QF_1|)=9k-|PQ|=9k-3k=6k=4a$，所以$k=\dfrac{2a}{3}$，

代入②得：$|PF_1|=4k-2a=\dfrac{2a}{3}$，又$|PF_2|=4k=\dfrac{8a}{3}$，$|F_1F_2|=2$，所以$(\dfrac{2a}{3})^2+(\dfrac{8a}{3})^2=2^2$，解得：$a^2=\dfrac{9}{17}$，

代入①得$b^2=1-a^2=\dfrac{8}{17}$，所以双曲线 E 的方程为$\dfrac{17x^2}{9}-\dfrac{17y^2}{8}=1$.


y
P
F_1
O
x
F_2
Q